

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II [4^ο (5^ο Κεφάλαιο)]

1) Να υπολογιστεί η γωνία των

$$\vec{x} = (1, 0, 1), \vec{y} = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$$

ως προς το σκωτικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$
 Έπειτα, να βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που
 είναι κάθετα στα $\vec{x}, \vec{y}$.

ΛΥΣΗ

$$\cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{(1, 0, 1) \cdot (-1, 1, 0)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = 120^\circ.$$

$$\text{αρκεί } \begin{cases} \langle (1, 0, 1), (x, y, z) \rangle = 0 \\ \langle (-1, 1, 0), (x, y, z) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ x = y = -z \end{cases}$$

$$\text{Άρα } (x, y, z) = z(-1, -1, 1) \text{ με } z \in \mathbb{R}$$

2) Έστω η απεικόνιση $\langle -, - \rangle': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

i) Να δο η παραπάνω απεικόνιση ορίσει εσωτερικό γινόμενο
 στον χώρο $\mathbb{R}^3$

ii) Να βρείτε όλα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα
 ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle -, - \rangle'$, με κάθε
 διάνυσμα του υπόχωρου

ΛΥΣΗ

$$V = \{(x, y, z) / x - y + z = 0\}$$

$$\begin{aligned} i) \bullet \langle u+v, w \rangle &= \langle (x_1+z_1, x_2+z_2, x_3+z_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \\ &= (x_1+z_1)y_1 + 2(x_2+z_2)y_2 + 3(x_3+z_3)y_3 = \\ &= x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + z_1 y_1 + 2z_2 y_2 + 3z_3 y_3 = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \langle \lambda u, v \rangle &= \lambda x_1 z_1 + 2\lambda x_2 z_2 + 3\lambda x_3 z_3 = \\ &= \lambda(x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + 3x_3 z_3) = \lambda \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\bullet \langle u, v \rangle = x_1 z_1 + 2x_2 z_2 + 3x_3 z_3 = 2x_1 + 2z_2 x_2 + 3z_3 x_3 = \langle v, u \rangle$$

$$\bullet \langle u, u \rangle = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 \geq 0$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \Rightarrow x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Άρα ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$.

$$ii) \quad x - y + z = 0 \Rightarrow y = x + z$$

$$\text{Τυχόν } (x, y, z) = (x, x+z, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$V = \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$$

$$\text{Πρέπει, } \begin{cases} \langle (1, 1, 0), (x, y, z) \rangle = 0 \\ \langle (0, 1, 1), (x, y, z) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y \\ 2y + 3z = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (-3z, \frac{3}{2}z, z) = z(-3, \frac{3}{2}, 1)$$

$$\text{Άρα, } W = \langle (-3, \frac{3}{2}, 1) \rangle$$

3) Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συννηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και τους υποχώρους

$$V = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + w = 0 \}$$

i) Να εξετάσετε αν οι V και W ορθοσυμμεταγώγιμοι.

ii) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $(V \cap W)^\perp$ του υποχώρου $V \cap W$.

iii) Να βρεθεί ΟΚΒ του $(V \cap W)^\perp$.

Λύση

i) Αρκεί $V \oplus W = \mathbb{R}^4$ και $V \perp W$.

$$2x + 3y + z = 0 \Rightarrow z = -2x - 3y$$

$$(x, y, z, w) = (x, y, -2x - 3y, w) =$$

$$= x(1, 0, -2, 0) + y(0, 1, -3, 0) + w(0, 0, 0, 1)$$

$$\text{Άρα } V = \langle (1, 0, -2, 0), (0, 1, -3, 0) \rangle \sim \dim V = 2$$

$$x - y + w = 0 \Rightarrow y = x + w$$

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) &= (x, x + w, z, w) = \\ &= x(1, 1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + w(0, 1, 0, 1) \\ \text{Άρα } W &= \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1) \rangle \sim \dim W = 3\end{aligned}$$

Άρα, άρα, $\forall \vec{v} \in W \neq \vec{0}$ ο $\vec{v}$, ο $\vec{v}$ είναι ο $\vec{v}$
 Άρα, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (0, 1, -3, 0), (1, 1, 0, 0) \rangle \neq 0$
 Άρα δεν είναι κάθε διανυσμα του V κάθε το
 σε κάθε διανυσμα του W .

ii)

$$V \cap W = \{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 3y + z = 0 \wedge x - y + w = 0 \}$$

$$z = -2x - 3y = -2x - 3(x + w) = -2x - 3x - 3w = -5x - 3w$$

$$y = x + w$$

Εστω, ο $\vec{v} \in V \cap W$ $(x, y, z, w) = (x, x + w, -5x - 3w, w) =$
 $= x(1, 1, -5, 0) + w(0, 1, -3, 1)$

Άρα $V \cap W = \langle (1, 1, -5, 0), (0, 1, -3, 1) \rangle \sim \dim(V \cap W) = 2$.

Άρα

$$(V \cap W) \oplus (V \cap W)^\perp = \mathbb{R}^4 \text{ και } (V \cap W)^\perp = (V \cap W)^\perp$$

Για να βρούμε ορθογώνιο διανυσμα θα πρέπει

$$\text{πρέπει, } \begin{cases} \langle (1, 1, -5, 0), (x, y, z, w) \rangle = 0 \\ \langle (0, 1, -3, 1), (x, y, z, w) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ y - 3z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x + 5z \\ -x + 5z - 3z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 5z \\ -x + 2z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2z - w + 5z = 3z - w \\ x = 2z + w = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z, w) = (2z + w, 3z - w, z, w) =$$

$$= 2(2, 3, 1, 0) + w(1, -1, 0, 1)$$

$$2 \times (v \cap w)^\perp = \langle (2, 3, 1, 0), (1, -1, 0, 1) \rangle \text{ γραμ. ανεξάρτητες}$$

iii) ορθοκανονικοποιούμε τη βάση μέσω G-S

$$u_1 = v_1 = (2, 3, 1, 0)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (1, -1, 0, 1) - \frac{\langle (1, -1, 0, 1), (2, 3, 1, 0) \rangle}{\langle (2, 3, 1, 0), (2, 3, 1, 0) \rangle} (2, 3, 1, 0)$$

$$= (1, -1, 0, 1) - \frac{2-3}{4+9+1} \cdot (2, 3, 1, 0) =$$

$$= (1, -1, 0, 1) + \frac{1}{14} (2, 3, 1, 0) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{7}, -1 + \frac{3}{14}, \frac{1}{14}, 1\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{14}, \frac{1}{14}, 1\right), \quad u_1 \perp u_2$$

$$\bullet w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(2, 3, 1, 0)}{\sqrt{14}}, \quad \bullet w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{\left(\frac{8}{7}, -\frac{11}{14}, \frac{1}{14}, 1\right)}{\sqrt{\frac{64}{49} + \frac{121}{196} + \frac{1}{196} + 1}}$$

με βάση των $\langle w_1, w_2 \rangle$.

4) Έστω Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^4$ εξοπλισμένος με το συννηθισμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω 0

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$$

i) Να βρεθούν ορθοκανονικές βάσεις των χώρων V και $V^\perp$

ii) Να γραφεί το $\vec{x} = (2, -1, 0)$ ως $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

με $\vec{y} \in V, \vec{z} \in V^\perp$

Λύση

$$i) \quad x = y + z \quad \text{ή} \quad \text{χωρίς } (x, y, z) = (y + z, y, z) =$$

$$= y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1) \quad \text{ή} \quad V = \langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

γραμ. ανεξάρτητες.

για τους ορθογώνιους βάση του V θα πρέπει να εφαρμόσουμε τη Μέθοδο G-S:

$$\bullet u_1 = v_1 = (1, 1, 0)$$

$$\bullet u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (1, 0, 1) - \frac{\langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle}{\langle (1, 1, 0), (1, 1, 0) \rangle} (1, 1, 0) =$$

$$= (1, 0, 1) - \frac{1}{2} (1, 1, 0) = (1 - \frac{1}{2}, 0 - \frac{1}{2}, 1 - 0) =$$

$$= (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), \quad \text{όπου } u_1 \perp u_2$$

$$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} \quad \text{και} \quad w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} =$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \quad \text{και} \quad = (\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$$

Άρα, ορθογώνια βάση του V είναι η

$$S = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) \right\}$$

Για το $V^\perp$:

$$\text{πρέπει: } \begin{cases} \langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ x + z = 0 \Rightarrow x = -z \end{cases}$$

$$\text{οπότε, } (x, y, z) = (-x, -x, -x) \Rightarrow \boxed{y = z = -x}$$

$$= x(1, -1, -1) \quad \text{Άρα } V^\perp = \langle (1, -1, -1) \rangle$$

$$\text{Με } u_1' = v_1' = (1, -1, -1)$$

$$\text{Άρα } w_1' = \frac{(1, -1, -1)}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Ενώ } V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^3 \quad \text{και} \quad V \perp V^\perp$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Επομένως, ορθογώνια βάση} \\ \text{του } V^\perp \text{ είναι η} \\ S' = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \right\} \end{array} \right.$$

ii) Να είναι $\vec{y} \in V$ και $\vec{z} \in V^\perp$ τότε

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ του οποίου ζητάμε να προκύψει

από :

$$\textcircled{1} (2, -1, 0) = k(1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, -1, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2, -1, 0) = (k + \lambda + \mu, k - \mu, \lambda - \mu)$$

$$\begin{cases} k + \lambda + \mu = 2 \\ k - \mu = -1 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 + \lambda + \lambda = 2 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \\ k = \lambda - 1 \Rightarrow k = 0 \\ \mu = \lambda \Rightarrow \mu = 1 \end{cases}$$

άρα η $\textcircled{1}$ ισχύει και το $\vec{x}$ γράφεται ως γραμμ. συνδυασμός των στοιχείων $\vec{y}, \vec{z}$

5) Έστω Ευκλείδεις χώρος $\mathbb{R}^3$ εξοπλισμένος με το συνδυασμένο εσωτερικό γινόμενο και έστω η γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$

i) Να βρεθεί η ορθοκανονική βάση της $\text{Im}(f)$ της f

ii) " " " " " του ορθοσυμπληρωματικού υποχώρου $\text{Im}(f)^\perp$

Λύση

i) Παιρνάμε την κανονική βάση με τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)$$

$$\text{Im}(f) = \langle T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1) \rangle =$$

$$= \langle (1, 0, -1), (-1, 1, 0), (0, -1, 1) \rangle$$

$$\left. \begin{aligned} -(0, -1, 1) &= (1, 0, -1) + (-1, 1, 0) \\ (0, 1, -1) &= (1, 0, -1) + (-1, 1, 0) \end{aligned} \right\} \text{Im}(f) = \langle (1, 0, -1), (-1, 1, 0) \rangle$$

Μεσω G-S : $\bullet V_1 = V_1 = (1, 0, -1)$

$$\dim \text{Im}(f) = 2,$$

$$\bullet w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (-1, 1, 0) - \frac{\langle (-1, 1, 0), (1, 0, -1) \rangle}{\langle (1, 0, -1), (1, 0, -1) \rangle} (1, 0, -1) = (-1, 1, 0) + \frac{1}{2} (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

Let $W_1 \perp W_2$ since $\langle w_1, w_2 \rangle = 0$.

Let $\{w_1, w_2\}$ be an orthonormal basis of W .

$$\text{Then } M = \left\{ z_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, z_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}$$

ii) Finally, we find the $\text{Im}(f)^\perp$

$$\text{Im}(f)^\perp = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (1, 0, -1), (x, y, z) \rangle = 0 \text{ and } \langle (-1, 1, 0), (x, y, z) \rangle = 0 \right\}$$

$$\begin{cases} \langle (1, 0, -1), (x, y, z) \rangle = 0 \\ \langle (-1, 1, 0), (x, y, z) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ x = y = z \end{cases}$$

$$\text{Thus } (x, y, z) = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$$

$$\text{Let } \text{Im}(f)^\perp = \langle (1, 1, 1) \rangle$$

$$\text{Let } u \in G-S : w' = (1, 1, 1)$$

$$\text{Let } z' = \frac{w'}{\|w'\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$$

Let $\{z'\}$ be an orthonormal basis of $\text{Im}(f)^\perp$.
Then M is:

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}$$